Universidad Andrés Bello

solemne 3 - 2017

P.3

Considere una lamina cuadrada $\Omega = [0,L] \times [0,L]$ en el plano $\mathbb{R}^2$, cuya frontera es adiabatica. Si la distribución inicial de la temperatura en grados Celsius está dada por: $T(x,y,0) = T_0 \left\{ 1 + \cos\left[\frac{3\pi}{L}x\right] \cos\left[\frac{2\pi}{L}y\right] \right\}$

Encuentre la temperatura $T(x,y,t)$ en Ω para todo "t" mayor que cero, usando unidades de manera que la conductividad termica de la lamina es igual a 1. Mencione que pasa en el regimen estacionario, es decir cuando $t \to \infty$.

Solución

La ecuación del calor es:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{c} \Delta T \text{ , o bien}$$

$$\frac{dT}{dt} = \Delta T \text{ , si } c = 1 \quad c: \text{conductividad termica.}$$

usando el metodo de separacion de variables, suponemos lo siguiente sobre la funcion $T(x,y,t)$

$$T(x,y,t) = X(x)\, Y(y)\, \Theta(t)$$

Así, $\frac{dT}{dt} = \Delta T$ se transforma en:

$$\frac{d}{dt}[X Y \Theta] = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right][X Y \Theta]$$

$$X Y \frac{d\Theta}{dt} = Y\Theta \frac{\partial^2 X}{\partial x} + X\Theta \frac{\partial^2 Y}{\partial y}$$

simplificando la notacion de las derivadas, Tenemos:

$$X Y \Theta' = Y\Theta X'' + X\Theta Y''$$

Asumiendo $T(x,y,t) \neq 0$, dividimos por $XY\Theta$:

$$\frac{X Y \Theta'}{XY\Theta} = \frac{Y\Theta X''}{XY\Theta} + \frac{X\Theta Y''}{XY\Theta}$$

Escaneado con CamScanner

2|

obtenemos: $\frac{\theta'}{\theta} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}$ ... (*)

si tomamos una constante de separación negativa, obtenemos Sen y Cos.

si tomamos una constante de separación positiva, obtenemos Senh y Cosh.

Escojemos una constante de separación negativa $-\mu^2$, de menera que.

$$\frac{\theta'}{\theta} = -\mu^2 \quad ..(1)$$

Reemplazamos (1) en (*) y

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\mu^2 \quad .. (2)$$

Para un μ dado, de (1) obtenemos que:

$$\frac{d\theta/dt}{\theta} = -\mu^2 \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -\mu^2\theta$$

2⇒ noTa|

$$\frac{d\theta}{dt} = -\mu^2\theta \rightarrow \frac{d\theta}{\theta} = -\mu^2 dt \rightarrow \int\frac{d\theta}{\theta} = \int -\mu^2 dt \rightarrow Ln\,\theta = -\mu^2 t + C_1'$$

$$e^{Ln\theta} = e^{-\mu^2 t + C_1'} \rightarrow \theta = e^{-\mu^2 t} e^{C_1'} \rightarrow \theta = C_1' e^{-\mu^2 t} \; ; \; C_1' = e^{C_1}$$

Entonces: $\theta_\mu(t) = D_\mu e^{-\mu^2 t}$

Ahora, introducimos otra constante de separación $(-\alpha^2)$, de menera que:

$$\frac{X''}{X} = -\alpha^2$$

Sabemos que la solución para esta ecuación es:

$$X_\alpha(x) = A_\alpha \cos(\alpha x) + B_\alpha \operatorname{sen}(\alpha x)$$

Ahora debemos aplicar la condicion de frontera en $x=0$ y $x=L$, que nos dice que la lamina es adiabatica en dichos puntos. Que sea adiabatica nos indica lo siguiente:

$$\hat{x} \cdot \vec{\nabla} T_{(x=0)} = \hat{x} \cdot \vec{\nabla} T_{(x=L} = 0$$

Escaneado con CamScanner

Universidad Andrés Bello

Ahora:

$$\hat{x}\cdot\vec{\nabla}T = [1\,\hat{x} + 0\,\hat{y}]\cdot[YT\,\partial X/\partial x\,\hat{x} + XT\,\partial Y/\partial y\,\hat{y}]$$

$$= YT\,\partial X/\partial x$$

luego: $YT\dfrac{\partial X}{\partial x} \equiv YT\dfrac{dX}{dx}$ ∴

Entonces: $YT\dfrac{dX}{dx} = 0$

Como esto se cumple para Todo valor de Y, T, Lacte con analizar dX/dx

$$\Rightarrow \frac{dX}{dx} = 0$$

Calculando la derivada, Tenemos:

$$\frac{d}{dx}X_\alpha(x) = -A_\alpha(\alpha)\,\text{sen}(\alpha x) + B_\alpha(\alpha)\,\text{sen}(\alpha x).$$

Aplicamos condicion de frontera: $\boxed{x = 0}$

$$-A_\alpha(\alpha)\,\text{sen}[\alpha(0)] + B_\alpha(\alpha)\cos[\alpha(0)] = 0.$$

$$-A_\alpha(\alpha)\,[0] + B_\alpha(\alpha)\,[1] = 0.$$

$$B_\alpha(\alpha) = 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{B_\alpha = 0} \quad \text{asumiendo } \alpha \neq 0.$$

Entonces, la funcion $X_\alpha(x)$ va quedando: $X_\alpha(x) = A_\alpha\cos(\alpha x)$.

y su derivada: $dX_\alpha(x)/dx = -A_\alpha(\alpha)\,\text{sen}(\alpha x)$.

Aplicando condiccon de frontera: $\boxed{X = L}$

$$-A_\alpha(\alpha)\,\text{sen}[\alpha(L)] = 0$$

Asumiendo, $A_\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 0$, Tenemos:

$\text{sen}[\alpha(L)] = 0$ implica: $\alpha L = n\pi$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_n = \frac{n\pi}{L}} \quad ; \; n \in \mathbb{N}$$

Escaneado con CamScanner

4]

Así, las soluciones admisibles en la dirección x son:

$$X_{\alpha_n}(x) = A_{\alpha_n} \cos(\alpha_n x) \quad \text{o también:} \quad \boxed{X_n(x) = A_n \cos\left[\frac{n\pi x}{L}\right]}$$

Ahora, tomamos una constante de separación negativa $(-\beta^2)$, tal que

$$\frac{Y''}{Y} = -\beta^2$$

sabemos que la solución para esta ecuación es:

$$Y_\beta(x) = A_\beta \cos(\beta y) + B_\beta \operatorname{sen}(\beta y)$$

Ahora, aplicamos la condición de borde en $y=0$ y $y=L$, que dice que la lámina también es adiabática en estos puntos. Es decir:

$$\hat{y} \cdot \vec{\nabla} T_{(y=0)} = \hat{y} \cdot \vec{\nabla} T_{(y=L)} = 0$$

Ahora:

$$\hat{y} \cdot \vec{\nabla} T = [0\hat{x} + 1\hat{y}] \cdot [Y T\, \partial X/\partial x\, \hat{x} + X T\, \partial Y/\partial y\, \hat{y}]$$

$$= X T\, \partial Y/\partial y$$

luego: $X T \dfrac{\partial Y}{\partial y} \equiv X T \dfrac{dY}{dy}$

Entonces: $X T \dfrac{dY}{dy} = 0$

Como esto se cumple para todo valor de X y T, basta con analizar dY/dy

$$\Rightarrow \frac{dY}{dy} = 0$$

Calculando la derivada, Tenemos:

$$\frac{dY}{dy} = -A_\beta(\beta) \operatorname{sen}(\beta y) + B_\beta(\beta) \cos(\beta y)$$

Aplicamos condición de frontera: $\boxed{y=0}$

$$-A_\beta(\beta) \operatorname{sen}[\beta(0)] + B_\beta(\beta) \cos[\beta(0)] = 0$$

$$-A_\beta(\beta)[0] + B_\beta(\beta)[1] = 0$$

$$B_\beta(\beta) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{B_\beta = 0} \quad \text{asumiendo } \beta \neq 0$$

Escaneado con CamScanner

Universidad Andrés Bello

Entonces la función $Y_\beta(y)$ va quedando:

$$Y_\beta(y) = A_\beta \cos(\beta y)$$

y su derivada: $dY_\beta(y)/dy = -A_\beta(\beta)\,sen(\beta y)$

Aplicando condición de borde: $\boxed{y = L}$

$$-A_\beta(\beta)\,sen[\beta(L)] = 0$$

Asumiendo, $A_\beta \neq 0$ y $\beta \neq 0$, Tenemos:

$sen[\beta(L)] = 0$ implica: $\beta(L) = m\pi$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \frac{m\pi}{L}} \; ; m \in \mathbb{N}$$

Así, las soluciones admisibles en la dirección "y" son:

$Y_{\beta_m}(y) = A_{\beta_m} \cos(\beta_m y)$ ó Tambien: $\boxed{Y_m(y) = A_m \cos\left[\frac{m\pi y}{L}\right]}$

Recordando que: $\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\mu^2$.

reemplazamos por las constentes de seperacción $(-\alpha^2)$ y $(-\beta^2)$, X''/X y Y''/Y respectivamente, obtenemos:

$$-\alpha^2 - \beta^2 = -\mu^2$$

recordando que α y β, dependen de n y m respectivamente, podemos cambiar un poco la notación y factorizar el menos para eliminarlo.

$$\mu_{n,m}^2 = \alpha_n^2 + \beta_m^2$$

reemplazamos las expresiones halladas de α_n y β_m, obtenemos:

$$\mu_{n,m}^2 = \left[\frac{n\pi}{L}\right]^2 + \left[\frac{m\pi}{L}\right]^2 \Rightarrow \mu_{n,m}^2 = n^2\left[\frac{\pi}{L}\right]^2 + m^2\left[\frac{\pi}{L}\right]^2.$$

$$\Rightarrow \mu_{n,m}^2 = \left[\frac{\pi}{L}\right]^2 (n^2 + m^2)$$

Recordando que: $\theta_n(t) = D_n e^{-\mu^2 t}$, cambiando un poco la notacion para incluir los subindices n, m, Tenemos:

$$\theta_{n,m} = D_{n,m} e^{-\mu_{n,m}^2 t}$$

Escaneado con CamScanner

6|

Reemplazando $\mu^2_{n,m}$ y cambiando un poco la notacion, para indicar la dependencia unicamente de n y m, tenemos:

$$\theta_{n,m}(t) = D_{n,m}\, e^{-(\pi/L)^2 (n^2+m^2) t}$$

Así, la solución general para una lamina adiabatica, de la ecuación:

$$\frac{dT}{dt} = \Delta T$$

es: $\sum_{n,m} X_n(x)\, Y_m(y)\, \theta_{n,m}(t)$, reemplazando las expresiones halladas

Tenemos:

$$\sum_{n,m} D_{n,m}\, e^{-(\pi/L)^2 (n^2+m^2) t} \cdot A_n \cos\left[\frac{n\pi}{L} x\right] \cdot A_m \cos\left[\frac{m\pi}{L} y\right]$$

Como $D_{n,m}$, A_n, A_m, son valores que dependen de n, m, pero constantes para n y m dados, podemos reunirlos todos dentro de $D_{n,m}$.

Entonces:

$$T(x,y,t) = \sum_{n,m} D_{n,m}\, e^{-(\pi/L)^2 (n^2+m^2) t} \cdot \cos\left[\frac{n\pi}{L} x\right] \cdot \cos\left[\frac{m\pi}{L} y\right] \quad \cdots (*)$$

Ahora, debemos aplicar, la condicion inicial, que dice que para $t=0$

Tenemos: $T(x,y,0) = T_0\left[1 + \cos(3\pi/L\, x)\cos(2\pi/L\, y)\right]$ ... (III)

Aplicando $t=0$ en (*) Tenemos:

$$T(x,y,0) = \sum_{n,m} D_{n,m} \underbrace{e^{-(\pi/L)^2 (n^2+m^2)(0)}}_{(1)} \cdot \cos\left[\frac{n\pi}{L} x\right] \cdot \cos\left[\frac{m\pi}{L} y\right]$$

$$= \sum_{n,m} D_{n,m} \cos\left[\frac{n\pi}{L} x\right] \cdot \cos\left[\frac{m\pi}{L} y\right] \quad \cdots (IV)$$

Ahora, comparemos (III) y (IV):

$$\sum_{n,m} D_{n,m} \cos\left[\frac{n\pi}{L} x\right] \cos\left[\frac{m\pi}{L} y\right] = T_0 \left\{1 + \cos\left[\frac{3\pi}{L} x\right] \cos\left[\frac{2\pi}{L} y\right]\right\} \quad \cdots (**)$$

Podemos representar el "1" como: $\cos(0)\cdot\cos(0)$; donde $\cos(0) = 1$

lo cual implica $n = m = 0$

$$\rightarrow 1 = \cos\left[\frac{(0)\pi}{L} x\right] \cos\left[\frac{(0)\pi}{L} y\right]$$

Reemplazemos en (**)

Escaneado con CamScanner

Universidad Andrés Bello

$$\sum_{n,m} D_{n,m} \cos\left[\frac{n\pi}{L}x\right]\cos\left[\frac{m\pi}{L}y\right] = T_0\left\{\cos\left[\frac{(0)\pi}{L}x\right]\cos\left[\frac{(0)\pi}{L}y\right] + \cos\left[\frac{3\pi}{L}x\right]\cos\left[\frac{2\pi}{L}y\right]\right\}$$

Expandimos los terminos de la sumatoria para $(n=0, m=0)$ y $(n=3, m=2)$ y descartamos los demas:

$$D_{0,0}\cos\left[\frac{(0)\pi}{L}x\right]\cos\left[\frac{(0)\pi}{L}y\right] + D_{3,2}\cos\left[\frac{3\pi}{L}x\right]\cos\left[\frac{2\pi}{L}y\right] =$$

$$T_0\cos\left[\frac{(0)\pi}{L}x\right]\cos\left[\frac{(0)\pi}{L}y\right] + T_0\cos\left[\frac{3\pi}{L}x\right]\cos\left[\frac{2\pi}{L}y\right]$$

Vemos que la unica forma de que se cumple la igualdad es que:

$$D_{0,0} = D_{3,2} = T_0$$

Resumiendo, los hallespos:
→ los unicos valores de n y m admisibles son: $n: 0, 3 \quad m: 0, 2$.
→ los coeficientes $D_{0,0}$ y $D_{3,2}$ son iguales a T_0.

Reemplazamos estos resultados en (**):

$$T(x,y,t) = D_{0,0}\underbrace{e^{-(\pi/L)^2(0^2+0^2)t}}_{1}\underbrace{\cos\left[\frac{(0)\pi}{L}x\right]}_{1}\underbrace{\cos\left[\frac{(0)\pi}{L}y\right]}_{1} + D_{3,2}e^{-(\pi/L)^2(3^2+2^2)t}\cos\left[\frac{3\pi}{L}x\right]\cos\left[\frac{2\pi}{L}y\right]$$

$$= D_{0,0}[1] + D_{3,2}e^{-(\pi/L)^2 13t}\cos\left[\frac{3\pi}{L}x\right]\cos\left[\frac{2\pi}{L}y\right]$$

$$= T_0[1] + T_0 e^{-13(\pi/L)^2 t}\cos\left[\frac{3\pi}{L}x\right]\cos\left[\frac{2\pi}{L}y\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{T(x,y,t) = T_0\left\{1 + e^{-13(\pi/L)^2 t}\cos\left[\frac{3\pi}{L}x\right]\cos\left[\frac{2\pi}{L}y\right]\right\}}$$

Ahora considerando, el regimen estacionario $t \to \infty$, tenemos:

$$e^{-13(\pi/L)^2(\infty)} \equiv e^{-\infty} = 0 \Rightarrow \boxed{T(x,y,t) = T_0}$$

Escaneado con CamScanner